Montrons que l'équation $f_n(x)=0$ n'admet pas de solution sur

$[\ n\ln\frac{n}{n+1}\ ,\ 0\ [$.

On a pour tout $x\in[\ n\ln\frac{n}{n+1}\ ,\ 0\ [$, $n\ln(\frac{n}{n+1})\le x<0\ \Rightarrow$

$f_n(0)<f_n(x)\le f_n(n\ \ln(\frac{n}{n+1}))$ car f_n est strictement décroissante sur

$[\ \ln\frac{n}{n+1}\ ,\ 0\ ]$. Or $f_n(0)=0$ donc $f_n(x)>0$.

Conclusion : L'équation $f_n(x)=0$ admet une seule solution x_n dans $]-\infty,0[$.

B) 1°/ φ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $\forall x\in\ ]1,+\infty[$, on a :

$$\varphi'(x)=\frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x^2-1}=\frac{2}{x^2(x^2-1)}>0$$

x	1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	
$\varphi(x)$		↗	0

d'après le tableau des variations de φ, on a : $\forall x>1$, $\phi(x)<0$.

2°/a) $f_n(-2)=\frac{n-1}{n+1}-e^{\frac{-2}{n}}$

On a : $\forall n\ge 2$, $\varphi(n)<0\Rightarrow \frac{2}{n}+\ \ln\frac{n-1}{n+1}<0\Rightarrow\ \ln\frac{n-1}{n+1}<\frac{-2}{n}$

$\Rightarrow \frac{n-1}{n+1}<e^{\frac{-2}{n}}\Rightarrow \frac{n-1}{n+1}-e^{\frac{-2}{n}}<0\ \Rightarrow f_n(-2)<0$.

b) On a d'après le tableau des variations de f_n

x		x_n		0		$+\infty$
$f_n(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\begin{cases} f_n(x)<0 \\ x<0 \end{cases} \Leftrightarrow x<x_n$ et comme $f_n(-2)<0$ donc $-2<x_n$.